TP n° 5 : Listes

Dans ce TP, nous vous proposons de travailler avec la structure naturellement récursive de liste chaînée en CAML.

On rappelle qu'une liste, de type `'a list` :

- peut être vide, et est alors notée `[]` ;
- a tous ses éléments de même type : `'a` ;
- possède, lorsqu'elle n'est pas vide une tête (premier élément) et une queue (liste des autres éléments), auxquelles on accède en temps constant par filtrage :

OCAML
```
match liste with
  | [] ->
  | tete :: queue ->
```

- `[1; 2; 3; 4]` est une écriture raccourcie pour `1 :: 2 :: 3 :: 4 :: []`.

1 Fonctions de base sur les listes

EXERCICE 1 *Longueur d'une liste*

Écrire une fonction `list_length : 'a list -> int` qui renvoie la longueur d'une liste. Quelle est sa complexité en fonction de la taille de la liste ?

EXERCICE 2 *Concaténation*

Écrire une fonction `concat : 'a list -> 'a list -> 'a list` qui renvoie la liste concaténée à partir de deux listes. Quelle est sa complexité en fonction des tailles des deux listes ? Par exemple, `concat [1; 2] [3; 4; 5]` doit renvoyer `[1; 2; 3; 4; 5]`.

2 D'autres fonctions

EXERCICE 3 *Maximum*

Écrire une fonction `maxi : 'a list -> 'a` qui renvoie l'élément maximal d'une liste (d'éléments comparables).

EXERCICE 4 *n^e élément*

Écrire une fonction `element_numero : int -> 'a list -> 'a` qui, à partir d'un entier n et d'une liste, renvoie le n^e élément de la liste.

EXERCICE 5 *Liste arithmétique*

Écrire une fonction `liste_arithm : int -> int -> int -> int list` qui prend en entrée des entiers n, a et b et qui renvoie une liste de longueur n dont les éléments sont les n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme a et de raison b.

EXERCICE 6 *Fonction mystère*

Quel est le type de la fonction suivante, et que fait-elle ?

OCAML
```
let rec mystere f liste =
  match liste with
  | [] -> []
  | tete :: queue -> (f tete) :: mystere f queue
;;
```

EXERCICE 7 *Découplage*

Écrire une fonction `decouple : ('a * 'b) list -> 'a list * 'b list` qui à partir d'une liste de couple renvoie un couple de listes

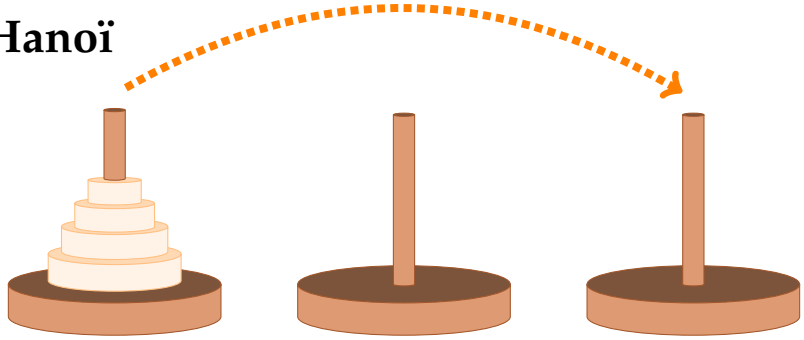
EXERCICE 8 *for_all*

Écrire une fonction `for_all : ('a -> bool) -> 'a list -> bool` prenant en argument un prédicat qui a un élément de type `'a` associe un booléen et une liste, et renvoyant `true` si le prédicat est vérifié pour tous les éléments de la liste, faux sinon.

Par exemple :

- `for_all (fun x -> x > 2) [1; 2; 3]` renvoie `false`
- `for_all (fun x -> x > 2) [4; 7; 9]` renvoie `true`.

3 Tours de Hanoï



Le jeu des **tours de Hanoï** a été inventé par le mathématicien Édouard Lucas au dix-neuvième siècle. Le principe est le suivant : il faut déplacer un pile de n disques d'un emplacement initial à un emplacement final en utilisant un emplacement intermédiaire, en respectant les règles :

- on ne peut déplacer que le disque en haut d'une pile,
- on ne peut empiler un disque que sur un disque plus grand.

Si vous ne connaissez pas ce jeu, essayez ici : `https://tiny.cc/hanoi`

C'est un problème facile à résoudre récursivement. Comment suffit-il de s'y prendre ?

1. Écrire une fonction `deplacement : int -> string -> string -> string` qui prend en argument un entier `n` et des chaînes de caractères `origine` et `destination` et renvoyant la chaîne de caractère

   `"Déplacer le disque {n} de {origine} à {destination}."`

   où `{n}`, `{origine}` et `{destination}` sont remplacés par leur valeur.
2. Écrire une fonction `hanoi_liste : int -> string -> string -> string -> string list -> string list` qui prend en argument :
   - un nombre entier `n` de disques à déplacer,
   - des chaînes de caractères `debut`, `fin` et `intermediaire` décrivant les piquets de départ et d'arrivée pour le déplacement des `n` disques, ainsi que le troisième piquet,
   - une liste de déplacements (chaînes de caractères) `liste_depl` déjà effectués

   et qui :
   - renvoie la liste de déplacements s'il n'y en a pas d'autre à faire,
   - résout sinon le problème de déplacements des n disques[1], à l'aide de deux déplacements de $n-1$ disques (appels récursifs) et du déplacement d'un disque (appel à `deplacement`) et renvoie la liste de tous les déplacements effectués.
3. Écrire une fonction `hanoi : int -> string list` renvoyant la liste de tous les déplacements à effectuer pour résoudre le problème avec un nombre donné de disque.

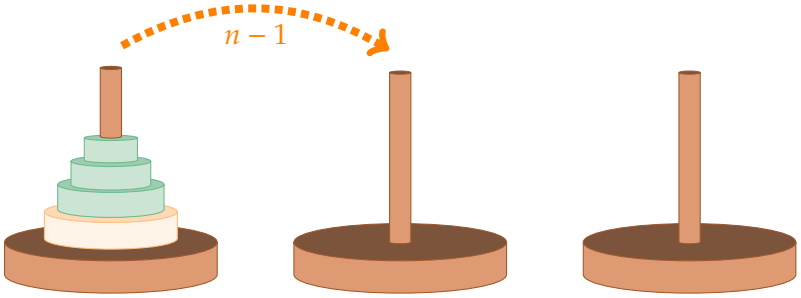
OCaml
```
hanoi 3;;
- : string list =
["Deplacer le disque 1 de gauche a droite.";
 "Deplacer le disque 2 de gauche a milieu.";
 "Deplacer le disque 1 de droite a milieu.";
 "Deplacer le disque 3 de gauche a droite.";
 "Deplacer le disque 1 de milieu a gauche.";
 "Deplacer le disque 2 de milieu a droite.";
 "Deplacer le disque 1 de gauche a droite."]
```

1. Si vous ne voyez vraiment pas comment le problème se résout récursivement, passez à la page suivante.

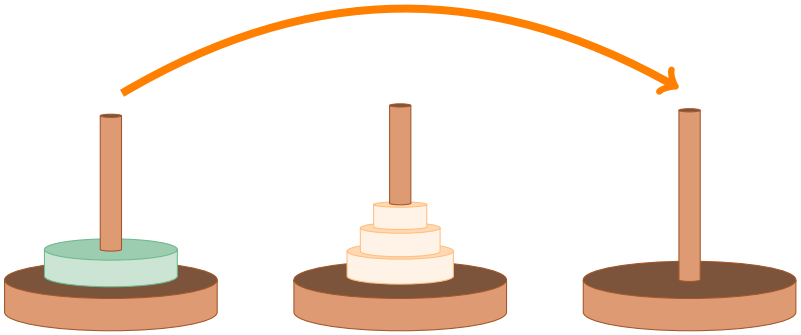
4. Combien de déplacements sont nécessaires pour déplacer n disques ?

Solution. Il suffit de :

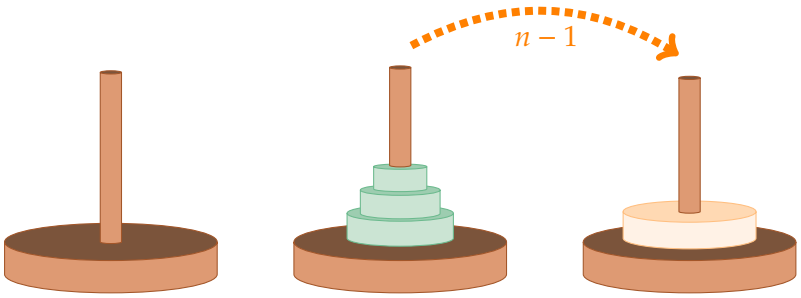
1. Déplacer les $n-1$ premiers disques sur la tige intermédiaire,



2. Puis le plus grand disque sur la tige finale



3. Et enfin de nouveau les $n-1$ premiers disques vers la tige finale.



Cela ne viole aucune règle du jeu.